MATHS I (M1)

Durée : 4 heures

Chacune des 7 premières questions peut être résolue indépendamment des autres à condition d'admettre, en cas de besoin, les résultats et notations figurant dans l'énoncé des questions précédentes.

$\mathcal{C}([0, 1])$ désigne l'espace des fonctions réelles continues sur $[0, 1]$. E_1 (resp. E_2) désigne l'espace des fonctions réelles sur $[0, 1]$, nulles en 0 et en 1, continûment dérivables (resp. deux fois continûment dérivables) sur $[0, 1]$.

1° Montrer que l'application linéaire $f \longmapsto f''$ de E_2 dans $\mathcal{C}([0, 1])$ est bijective et que son inverse K est de la forme $\varphi \longmapsto K\varphi$ avec :

$$\forall x \in [0, 1], \quad (K\varphi)(x) = \int_0^1 k(x, y)\, \varphi(y)\, dy,$$

où k est une fonction continue sur $[0, 1]^2$.

2° On note $E_1^* = E_1 \setminus \{0\}$ et on pose :

$$\lambda = \inf_{f \in E_1^*} \frac{\int_0^1 [f'(t)]^2\, dt}{\int_0^1 [f(t)]^2\, dt}. \qquad (*)$$

Montrer l'inégalité $2 \leqslant \lambda \leqslant 10$.

3° Montrer :

$$\forall f \in E_1, \quad \forall g \in E_1,$$

$$\int_0^1 (f + \lambda Kf)'(t)\, g'(t)\, dt \leqslant$$

$$\sqrt{\int_0^1 ([f'(t)]^2 - \lambda [f(t)]^2)\, dt}\ \sqrt{\int_0^1 ([g'(t)]^2 - \lambda [g(t)]^2)\, dt}.$$

4° Soit $(f_n)_{n \geqslant 0}$ une suite d'éléments de E_1 telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \int_0^1 [f_n(t)]^2\, dt = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{n \to \infty} \int_0^1 [f_n'(t)]^2\, dt = \lambda.$$

Montrer :

$$\lim_{n \to \infty} \int_0^1 [(f_n + \lambda K f_n)'(t)]^2\, dt = 0.$$

5° Montrer :

$$f_n + \lambda K f_n = \varphi_n,$$

où $(\varphi_n)_{n \geqslant 0}$ est une suite d'éléments de E_1 convergeant uniformément vers 0 sur $[0, 1]$.

6° Déterminer f_n en fonction de φ_n et montrer qu'il existe une suite de réels $(A_n)_{n \geqslant 0}$ telle que $f_n(x) - A_n \sin \sqrt{\lambda}\, x$ converge vers 0, quand n tend vers l'infini, uniformément par rapport à x sur $[0, 1]$.

7° Déterminer λ.

8° Montrer que dans (*) la borne inférieure est atteinte. Préciser l'ensemble des fonctions f pour lesquelles cette borne est atteinte.

-196- ENSET 81

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail